23/03/17.

Πρόταση: (Νόμος Διαγραφής): Έστω $(G,*)$ μια ομάδα και $x,y,z \in G$. Τότε

- $x*y = x*z \Rightarrow y=z$
- $x*y = z*y \Rightarrow x=z$.

Απόδειξη: Έστω $x*y = x*z \Rightarrow x'*(x*y) = x'*(x*z)$
$\Rightarrow (x'*x)*y = (x'*x)*z \Rightarrow e*y = e*z \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{y=z}$

Παρόμοια αποδεικνύεται και η 2η.

Ορισμός: Μία ομάδα $(G,*)$ καλείται πεπ/νη $\Leftrightarrow |G|<\infty$
Η ομάδα $(G,*)$ καλείται άπειρη $\Leftrightarrow |G|=\infty$.

Π.χ. $\forall n \geq 1$: $(\mathbb{Z}_n,+)$ πεπ/νη και $|\mathbb{Z}_n|=n$.
-//- $(U_n,\cdot)$ -//- $|U_n|=n$.
-//- $(S_n,\circ)$ -//- $|S_n|=n!$

Επίσης $(\mathbb{Z},+)$, ..., $(\mathbb{C},+)$, $(U,\cdot)$, $(GL_n(\mathbb{K}),\cdot)$: άπειρες ομάδες
$\mathbb{K}=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$

Ορισμός: Αν $(G,*)$ είναι μία πεπ/νη ομάδα τότε ο αριθμός $|G|$ θα καλείται τάξη της ομάδας κ' όταν $|G|=\infty$ θα λέμε ότι η $(G,*)$ έχει άπειρη τάξη.

Πίνακας Cayley μιας ομάδας

Έστω $(G,*)$ μια πεπερασμένη ομάδα κι έστω ότι $G=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $\alpha_1=e$.

Ο πίνακας Cayley της G είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $C(G,*)=(\alpha_{ij})$ όπου $\forall i,j=1,\dots,n: \alpha_{ij}=\alpha_i*\alpha_j$

$$\begin{array}{c|ccccc}
* & \overset{e}{\alpha_1} & \alpha_2 & \cdots & \alpha_j & \cdots\ \alpha_n \\
\hline
e=\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_j & \cdots\ \alpha_n \\
\alpha_2 & \alpha_2 & & & \vdots & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
\alpha_i & \alpha_i & & \cdots & \alpha_i*\alpha_j & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
\alpha_n & \alpha_n & & & &
\end{array}$$

Ιδιότητες του Πίνακα Cayley:

① Η πρώτη γραμμή και η πρώτη στήλη του Cayley είναι τα στοιχεία της ομάδας με την ίδια σειρά.

② Κάθε γραμμή και κάθε στήλη του πίνακα Cayley της ομάδας περιέχει όλα τα στοιχεία της ομάδας ακριβώς μια φορά.

Πράγματι, επειδή οι εξισώσεις $\alpha_i*x=\alpha_k$ και $x*\alpha_j=\alpha$ $\forall i,j,k\in\{1,\dots,n\}$ έχουν μοναδική λύση.

③ Ο πίνακας Cayley θα είναι συμμετρικός $\Leftrightarrow$ η ομάδα $(G,*)$ είναι αβελιανή

• Αν γνωρίζουμε τον πίνακα Cayley μιας ομάδας τότε γνωρίζουμε όλες τις πληροφορίες για την ομάδα.

$\leftrightarrow$

• $|G|=1 \Rightarrow G=\{e\}$

$$\begin{array}{c|c}
* & e \\
\hline
e & e
\end{array}$$

• $|G|=2 \Rightarrow G=\{e,\alpha\}$

$$\begin{array}{c|cc}
* & e & \alpha \\
\hline
e & e & \alpha \\
\alpha & \alpha & e
\end{array}$$

$\alpha*\alpha = \begin{cases} e \ \checkmark \\ \alpha \end{cases}$ (γιατί πρέπει στον πίνακα να έχω σε κάθε γραμμή/στήλη όλα τα στοιχεία της G 1 φορά)

• $|G| = 3 \Rightarrow G = \{e, \alpha, b\}$

$$\alpha * \alpha = \begin{cases} e : \text{απορ.} \\ \alpha : \text{απορ.} \\ b \checkmark \end{cases}$$

*	e	α	b
e	e	α	b
α	α	b	e
b	b	α	e

Η G είναι αβελιανή αφού ο πίνακας Cayley είναι συμμετρικός.

• Έστω $(G, *)$ ομάδα και $G = \{e, \alpha\}$ τότε ο πίνακας Cayley της G είναι ο:

*	e	α
e	e	α
α	α	e

$(\mathbb{Z}_2, +)$

+	$[0]_2$	$[1]_2$
$[0]_2$	$[0]_2$	$[1]_2$
$[1]_2$	$[1]_2$	$[0]_2$

$(U_2, \cdot)$, $U_2 = \{1, -1\}$

·	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

$G = \{K, M\}$

∘	M	K
M	M	K
K	K	M

Μια ομάδα καθορίζεται πλήρως απ' τον πίνακα Cayley.
Έτσι 2 ομάδες $(G, *)$, $(H, \circ)$ πεπ/νες θα θεωρούνται "ίδιες" (ισόμορφες) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ οι ομάδες έχουν τις ίδιες δομικές ιδιότητες (οι οποίες προκύπτουν απ' τα αξιώματα) $\Leftrightarrow$ μετά από κάποια αναδιάταξη / μετονομασία των στοιχείων τους, δηλαδή $\exists f : G \xrightarrow{\text{επί}} H$ τέτοια ώστε $\forall \alpha_i, \alpha_j \in G : f(\alpha_i * \alpha_j) \overset{1-1}{=} f(\alpha_i) \circ f(\alpha_j)$

Π.χ. : Οι ομάδες $(\mathbb{Z}_2, +)$ και $(G = \{M, K\}, \circ)$ είναι ισόμορφες διότι $f : \mathbb{Z}_2 \to G$, $f \begin{cases} [0]_2 \to M \\ [1] \to K \end{cases}$

και $f([1]_2 + [1]_2) = f([0]_2) = M$
$f([1]_2) \circ f([1]_2) = K \circ K = M$

+	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[0]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[1]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$
$[2]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$

• $(\mathbb{Z}_3,+)$: $\mathbb{Z}_3=\{[0]_3,[1]_3,[2]_3\}$

• $(U_3,\cdot)$ $U_3=\{\underbrace{1}_{\omega^0}, \underbrace{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}_{\omega}, \underbrace{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}_{\omega^2}\}$

$\cdot$	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

f : 1-1 κ' επί

άρα $\mathbb{Z}_3$, U_3 είναι ισόμορφες

Πολλ/κός Συμβολισμός	Γενικός Συμβολισμός	Προσθετικός Συμβολισμός
$\alpha\cdot b$	$\alpha * b$	$\alpha + b$
α^{-1}	α'	$-\alpha$ (αντίθετο του α)
1 ή e	e	0 (μηδενικό)
$\alpha\cdot b^{-1}$	$\alpha * b'$	$\alpha - b$
$(\alpha\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot\alpha^{-1}$	$(\alpha * b)'=b' * \alpha'$	$-(\alpha+b)=-b-\alpha$
α^n	$\underbrace{\alpha * \cdots * \alpha}_{n\text{-φορές}} = \overset{n}{\underset{k=1}{*}}\alpha^k$	$n\alpha$.